Ejemplos de Espacios Normados

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Desigualdad de Young. Sean p, q números reales positivos tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ se verifica que:

$$\boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a^p = b^q$.

Desigualdad de Young. Sean p, q números reales positivos tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{R}_o^+$ se verifica que:

$$\boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a^p = b^q$.

Demostración. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$. Se prueba fácilmente que $\varphi'(a) = 0 \Leftrightarrow a = b^{\frac{q}{p}}$ y que en dicho punto la función φ tiene un mínimo absoluto estricto que es igual a 0.

Desigualdad de Young. Sean p, q números reales positivos tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ se verifica que:

$$\boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a^p = b^q$.

Demostración. Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$. Se prueba fácilmente que $\varphi'(a) = 0 \Leftrightarrow a = b^{\frac{q}{p}}$ y que en dicho punto la función φ tiene un mínimo absoluto estricto que es igual a 0.

Dado un número real $p > 1$, definimos su **exponente conjugado** $q \in \mathbb{R}^+$ por la igualdad $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Desigualdad de Hölder. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todos $a_k, b_k \in \mathbb{R}_0^+$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, se verifica que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k^p = \lambda b_k^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Desigualdad de Hölder. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todos $a_k, b_k \in \mathbb{R}_o^+$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, se verifica que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k^p = \lambda b_k^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Demostración. Pongamos $A = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, y supongamos que $A > 0$ y $B > 0$ porque en otro caso no hay nada que probar.

Desigualdad de Hölder. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todos $a_k, b_k \in \mathbb{R}_o^+$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, se verifica que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k^p = \lambda b_k^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Demostración. Pongamos $A = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, y supongamos que $A > 0$ y $B > 0$ porque en otro caso no hay nada que probar.

Aplicando la desigualdad de Young a los números $\frac{a_k}{A}$ y $\frac{b_k}{B}$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, y sumando las desigualdades obtenidas se obtiene la desigualdad del enunciado.

Desigualdad de Hölder. Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todos $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+_o$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, se verifica que:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k^p = \lambda b_k^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Demostración. Pongamos $A = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$, y supongamos que $A > 0$ y $B > 0$ porque en otro caso no hay nada que probar.

Aplicando la desigualdad de Young a los números $\frac{a_k}{A}$ y $\frac{b_k}{B}$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, y sumando las desigualdades obtenidas se obtiene la desigualdad del enunciado.

La igualdad se da si, y sólo si, todas las N desigualdades son igualdades, es decir cuando $a_k^p = \lambda b_k^q$, donde $\lambda = \frac{A^p}{B^q}$. $\square$

Desigualdad de Minkowski. Para todos $p > 1$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_k, b_k \in \mathbb{R}_o^+$, $1 \leqslant k \leqslant N$, se verifica que:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \tag{1}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k = \lambda b_k$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Desigualdad de Minkowski. Para todos $p > 1$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_k, b_k \in \mathbb{R}_0^+$, $1 \leqslant k \leqslant N$, se verifica que:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad (1)$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k = \lambda b_k$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Demostración. Supongamos que no todos los a_k o todos los b_k son nulos, y sea q el exponente conjugado de p. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{N}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{N}b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leqslant \\ &\quad \text{(aplicando la desigualdad de Hölder a cada suma, teniendo en cuenta} \\ &\quad \text{que } q(p-1)=p \text{ y sacando factor común)} \\ &\leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Desigualdad de Minkowski. Para todos $p > 1$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_k, b_k \in \mathbb{R}_o^+$, $1 \leqslant k \leqslant N$, se verifica que:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \tag{1}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda > 0$ tal que $a_k = \lambda b_k$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Demostración. Supongamos que no todos los a_k o todos los b_k son nulos, y sea q el exponente conjugado de p. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p \quad &= \quad \sum_{k=1}^{N} a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{N} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leqslant \\
&\quad \text{(aplicando la desigualdad de Hölder a cada suma, teniendo en cuenta} \\
&\quad \text{que } q(p-1) = p \text{ y sacando factor común)} \\
&\leqslant \quad \left(\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

De donde se sigue la desigualdad del enunciado.

Desigualdad de Minkowski. Para todos $p>1$, $N\in\mathbb{N}$ y $a_k,b_k\in\mathbb{R}_o^+$, $1\leqslant k\leqslant N$, se verifica que:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}\tag{1}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda>0$ tal que $a_k=\lambda b_k$ para $1\leqslant k\leqslant N$.

Demostración. Supongamos que no todos los a_k o todos los b_k son nulos, y sea q el exponente conjugado de p. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{N}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{N}b_k(a_k+b_k)^{p-1}\leqslant\\ &\quad\text{(aplicando la desigualdad de Hölder a cada suma, teniendo en cuenta}\\ &\quad\text{que } q(p-1)=p \text{ y sacando factor común)}\\ &\leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

De donde se sigue la desigualdad del enunciado.

La igualdad se da si, y sólo si, se da la igualdad en las dos desigualdades de Hölder que hemos aplicado, es decir, cuando $a_k^p=\alpha(a_k+b_k)^p$ y $b_k^p=\beta(a_k+b_k)^p$, para $1\leqslant k\leqslant N$, con $\alpha>0$ y $\beta>0$, lo que equivale a que $a_k=\lambda b_k$ para $1\leqslant k\leqslant N$, con $\lambda>0$. □

Normas en $\mathbb{K}^N$

Para cada $p \geqslant 1$y para $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N)) \in \mathbb{K}^N$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Normas en $\mathbb{K}^N$

Para cada $p \geqslant 1$y para $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N)) \in \mathbb{K}^N$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Y también definimos

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Para cada $p \geqslant 1$y para $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N)) \in \mathbb{K}^N$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Y también definimos

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Es muy fácil probar que $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_1$ son normas.

Normas en $\mathbb{K}^N$

Para cada $p \geqslant 1$y para $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N)) \in \mathbb{K}^N$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Y también definimos

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Es muy fácil probar que $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_1$ son normas.

Por la desigualdad de Minkowski tenemos para $p > 1$:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} \big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\overset{(2)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}
$$

Por la desigualdad de Minkowski tenemos para $p > 1$:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} \big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\overset{(2)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

La igualdad $\|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ se da si, y sólo si, se da la igualdad en (2) lo que, según sabemos, equivale a que $|x(k)| = \lambda |y(k)|$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, donde $\lambda > 0$, y también se da la igualdad en (1), esto es, $|x(k)+y(k)| = |x(k)| + |y(k)|$, lo que equivale a que los números $x(k)$ e $y(k)$ estén en una misma semirrecta, esto es, $x(k) = \alpha_k y(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, donde $\alpha_k > 0$. Tomando módulos deducimos que $\alpha_k = \lambda$, y concluimos que $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

Por la desigualdad de Minkowski tenemos para $p > 1$:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} \big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\overset{(2)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

La igualdad $\|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ se da si, y sólo si, se da la igualdad en (2) lo que, según sabemos, equivale a que $|x(k)| = \lambda |y(k)|$ para $k = 1, 2, \dots, N$, donde $\lambda > 0$, y también se da la igualdad en (1), esto es, $|x(k)+y(k)| = |x(k)| + |y(k)|$, lo que equivale a que los números $x(k)$ e $y(k)$ estén en una misma semirrecta, esto es, $x(k) = \alpha_k y(k)$ para $k = 1, 2, \dots, N$, donde $\alpha_k > 0$. Tomando módulos deducimos que $\alpha_k = \lambda$, y concluimos que $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

La igualdad $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ equivale a que $x(k) = \lambda_k y(k)$ con $\lambda_k \geqslant 0$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Por la desigualdad de Minkowski tenemos para $p > 1$:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} \big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\overset{(2)}{\leqslant} \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

La igualdad $\|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ se da si, y sólo si, se da la igualdad en (2) lo que, según sabemos, equivale a que $|x(k)| = \lambda|y(k)|$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, donde $\lambda > 0$, y también se da la igualdad en (1), esto es, $|x(k)+y(k)| = |x(k)|+|y(k)|$, lo que equivale a que los números $x(k)$ e $y(k)$ estén en una misma semirrecta, esto es, $x(k) = \alpha_k y(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, donde $\alpha_k > 0$. Tomando módulos deducimos que $\alpha_k = \lambda$, y concluimos que $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

La igualdad $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ equivale a que $x(k) = \lambda_k y(k)$ con $\lambda_k \geqslant 0$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Por tanto $(\mathbb{K}^N, \|\ \|_p)$ es un espacio normado. Notaremos $\ell_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\ \|_p)$ y $\ell_p^N(\mathbb{K})$ si queremos especificar el cuerpo.

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N}|x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(x,y\in\mathbb{K}^{N},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{2}$$

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N}|x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(x,y\in\mathbb{K}^{N},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{2}$$

Y, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^{p} = \lambda|y(k)|^{q}$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (x, y \in \mathbb{K}^N,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \tag{2}$$

Y, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

En el caso en que $p = q = 2$ deducimos también la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\left| \sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)} \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N}|x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (x,y\in\mathbb{K}^N,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1) \tag{2}$$

Y, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

En el caso en que $p = q = 2$ deducimos también la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Si para $x,y\in\mathbb{K}^N$ convenimos en representar por xy el vector de $\mathbb{K}^N$ cuyas coordenadas son $(xy)(k) = x(k)y(k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, entonces podemos escribir la desigualdad de Hölder en la forma

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$$

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N}|x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(x,y\in\mathbb{K}^{N},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{2}$$

Y, supuesto que $x\neq 0$ e $y\neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda>0$ tal que $|x(k)|^{p}=\lambda|y(k)|^{q}$ para $1\leqslant k\leqslant N$.

En el caso en que $p=q=2$ deducimos también la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\left|\sum_{k=1}^{N}x(k)\overline{y(k)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Si para $x,y\in\mathbb{K}^{N}$ convenimos en representar por xy el vector de $\mathbb{K}^{N}$ cuyas coordenadas son $(xy)(k)=x(k)y(k)$, $1\leqslant k\leqslant N$, entonces podemos escribir la desigualdad de Hölder en la forma

$$\|xy\|_{1}\leqslant\|x\|_{p}\|y\|_{q}$$

Si adoptamos el convenio de que $q=\infty$ cuando $p=1$ y $q=1$ cuando $p=\infty$, esta desigualdad también es cierta para $p=1,\infty$.

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(x, y \in \mathbb{K}^N,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{2}$$

Y, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

En el caso en que $p = q = 2$ deducimos también la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\left| \sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)} \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Si para $x, y \in \mathbb{K}^N$ convenimos en representar por xy el vector de $\mathbb{K}^N$ cuyas coordenadas son $(xy)(k) = x(k)y(k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, entonces podemos escribir la desigualdad de Hölder en la forma

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

Si adoptamos el convenio de que $q = \infty$ cuando $p = 1$ y $q = 1$ cuando $p = \infty$, esta desigualdad también es cierta para $p = 1, \infty$.

Todas las normas que acabamos de definir en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, pues es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$, y también

$$\|x\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\,e_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\|e_k\|_p = \|x\|_1$$

Todas las normas que acabamos de definir en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, pues es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$, y también

$$\|x\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \|e_k\|_p = \|x\|_1$$

por tanto

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Todas las normas que acabamos de definir en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, pues es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$, y también

$$\|x\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \|e_k\|_p = \|x\|_1$$

por tanto

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{K}^N)$$

En consecuencia todas ellas inducen la misma topología en $\mathbb{K}^N$, que no es otra que la topología producto, pues es claro que las bolas para la norma $\| \ \|_\infty$ son producto cartesiano de bolas (intervalos si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y discos si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) en $\mathbb{K}$.

Todas las normas que acabamos de definir en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, pues es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$, y también

$$\|x\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\,\mathrm{e}_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\|\mathrm{e}_k\|_p = \|x\|_1$$

por tanto

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{K}^N)$$

En consecuencia todas ellas inducen la misma topología en $\mathbb{K}^N$, que no es otra que la topología producto, pues es claro que las bolas para la norma $\|\ \|_\infty$ son producto cartesiano de bolas (intervalos si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y discos si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) en $\mathbb{K}$.

Es muy sencillo probar que $\|\ \|_\infty$ es completa, por lo que todas estas normas son completas, y además la convergencia de una sucesión, $\{x_n\} \to x$, en cualquiera de ellas, equivale a la convergencia por coordenadas: $\{x_n(k)\} \to x(k)$ para $1 \leqslant k \leqslant N$.

Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y (E,d) un espacio métrico. Una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones $f_n : \Omega \to E$, se dice que converge en un punto $x \in \Omega$, si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente en (E,d).

Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y (E,d) un espacio métrico. Una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones $f_n : \Omega \to E$, se dice que converge en un punto $x \in \Omega$, si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente en (E,d).Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es **puntualmente convergente** en un conjunto no vacío $A \subset \Omega$ si para todo $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente en (E,d).

Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y (E,d) un espacio métrico. Una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones $f_n : \Omega \to E$, se dice que converge en un punto $x \in \Omega$, si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente en (E,d).Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es **puntualmente convergente** en un conjunto no vacío $A \subset \Omega$ si para todo $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente en (E,d).El conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ es convergente en } (E,d)\}$$

se llama **campo de convergencia puntual** de la sucesión$\{f_n\}$, y la función $f : \mathcal{C} \to E$ definida por $f(x) = \lim \{f_n(x)\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$, se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y (E,d) un espacio métrico. Una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones $f_n : \Omega \to E$, se dice que converge en un punto $x \in \Omega$, si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente en (E,d).Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es **puntualmente convergente** en un conjunto no vacío $A \subset \Omega$ si para todo $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente en (E,d).El conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ es convergente en } (E,d)\}$$

se llama **campo de convergencia puntual** de la sucesión$\{f_n\}$, y la función $f : \mathcal{C} \to E$ definida por $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$, se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** en un conjunto no vacío $A \subset \mathcal{C}$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\sup\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in A\} \leqslant \varepsilon$.

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \neq \emptyset$, representaremos por $\ell_\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de Ω en $\mathbb{K}$. Dicho conjunto, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas puntualmente:

$$(x+y)t) = x(t)+y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \qquad (x,y \in \ell_\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{K}, t \in \Omega)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \neq \emptyset$, representaremos por $\ell_\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de Ω en $\mathbb{K}$. Dicho conjunto, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas puntualmente:

$$(x+y)t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \qquad (x, y \in \ell_\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{K}, t \in \Omega)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.Definiendo:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in \Omega\} \qquad (x \in \ell_\infty(\Omega))$$

se obtiene, como es muy fácil comprobar, una norma en dicho espacio vectorial.

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \neq \emptyset$, representaremos por $\ell_\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de Ω en $\mathbb{K}$. Dicho conjunto, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas puntualmente:

$$(x+y)t) = x(t)+y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \qquad (x,y \in \ell_\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{K}, t \in \Omega)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.Definiendo:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in \Omega\} \qquad (x \in \ell_\infty(\Omega))$$

se obtiene, como es muy fácil comprobar, una norma en dicho espacio vectorial.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \quad \text{siempre que } p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \tag{4}$$

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n \to \infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \ \text{ siempre que } p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \tag{4}$$

Fijamos ahora $t \in \Omega$ y $p \geqslant n_0$, y consideramos la sucesión $q \mapsto |x_p(t) - x_q(t)|$. Dicha sucesión es convergente con límite $|x_p(t) - x(t)|$ y sus términos, cuando $q \geqslant n_0$, verifican la desigualdad (4), por lo que su límite también la verificará.

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \ \text{ siempre que } p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \tag{4}$$

Fijamos ahora $t \in \Omega$ y $p \geqslant n_0$, y consideramos la sucesión $q \mapsto |x_p(t) - x_q(t)|$. Dicha sucesión es convergente con límite $|x_p(t) - x(t)|$ y sus términos, cuando $q \geqslant n_0$, verifican la desigualdad (4), por lo que su límite también la verificará.Obtenemos así que

$$|x_p(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \ \text{ siempre que } p \geqslant n_0$$

Proposición. El espacio normado $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$.Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge.Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$.Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \quad \text{siempre que } p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \tag{4}$$

Fijamos ahora $t \in \Omega$ y $p \geqslant n_0$, y consideramos la sucesión $q \mapsto |x_p(t) - x_q(t)|$. Dicha sucesión es convergente con límite $|x_p(t) - x(t)|$ y sus términos, cuando $q \geqslant n_0$, verifican la desigualdad (4), por lo que su límite también la verificará.Obtenemos así que

$$|x_p(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ para todo } \ t \in \Omega \quad \text{siempre que } p \geqslant n_0$$

Deducimos que $\|x_p - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$, por tanto $x_p - x \in \ell_\infty(\Omega)$ y $x = x_p - (x_p - x) \in \ell_\infty(\Omega)$. Además $\|x_p - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$ para todo $p \geqslant n_0$, luego $\|x_n - x\|_\infty \to 0$. $\square$

La convergencia en la norma $\| \ \|_\infty$ es la convergencia uniforme en Ω, por lo que dicha norma suele llamarse **norma uniforme**.

Representaremos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n) = x(n)+y(n), \qquad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K})$$

Representaremos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n) = x(n)+y(n), \qquad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K})$$

Recuerda también que el producto de dos sucesiones $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión xy definida por $(xy)(n) = x(n)y(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n)=x(n)+y(n), \qquad (\lambda x)(n)=\lambda x(n) \qquad (n\in\mathbb{N}, x, y\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda\in\mathbb{K})$$

Recuerda también que el producto de dos sucesiones $x, y\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión xy definida por $(xy)(n)=x(n)y(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Es importante en todo lo que sigue que trates a las sucesiones de escalares como lo que son: **aplicaciones** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$. Por tanto, si $\{x_n\}$ es una "sucesión de sucesiones", esto es de elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, es decir, insisto, de aplicaciones $x_n:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$, la expresión "$\{x_n\}$ *converge puntualmente*" tiene perfecto sentido, y significa que para todo $k\in\mathbb{N}$ la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$ es convergente, en tal caso, la sucesión $x\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definida por $x(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n(k)\}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ no es otra cosa que el límite puntual de $\{x_n\}$.

Representaremos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n), \qquad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K})$$

Recuerda también que el producto de dos sucesiones $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión xy definida por $(xy)(n) = x(n)y(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es importante en todo lo que sigue que trates a las sucesiones de escalares como lo que son: **aplicaciones** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$. Por tanto, si $\{x_n\}$ es una "sucesión de sucesiones", esto es de elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, es decir, insisto, de aplicaciones $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, la expresión "$\{x_n\}$ *converge puntualmente*" tiene perfecto sentido, y significa que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$ es convergente, en tal caso, la sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definida por $x(k) = \lim_{n \to \infty} \{x_n(k)\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no es otra cosa que el límite puntual de $\{x_n\}$.

El espacio $\ell_\infty(\Omega)$, en el caso particular en que $\Omega = \mathbb{N}$, se representa simplemente por ℓ_∞, o si se quiere precisar $\ell_\infty(\mathbb{K})$, y es el espacio vectorial de las sucesiones de escalares acotadas en el que se considera la norma uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in \ell_\infty)$$

Representaremos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n)=x(n)+y(n), \qquad (\lambda x)(n)=\lambda x(n) \qquad (n\in\mathbb{N}, x,y\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda\in\mathbb{K})$$

Recuerda también que el producto de dos sucesiones $x,y\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión xy definida por $(xy)(n)=x(n)y(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Es importante en todo lo que sigue que trates a las sucesiones de escalares como lo que son: **aplicaciones** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$. Por tanto, si $\{x_n\}$ es una "sucesión de sucesiones", esto es de elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, es decir, insisto, de aplicaciones $x_n:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$, la expresión "$\{x_n\}$ *converge puntualmente*" tiene perfecto sentido, y significa que para todo $k\in\mathbb{N}$ la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$ es convergente, en tal caso, la sucesión $x\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definida por $x(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n(k)\}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ no es otra cosa que el límite puntual de $\{x_n\}$.

El espacio $\ell_\infty(\Omega)$, en el caso particular en que $\Omega=\mathbb{N}$, se representa simplemente por ℓ_∞, o si se quiere precisar $\ell_\infty(\mathbb{K})$, y es el espacio vectorial de las sucesiones de escalares acotadas en el que se considera la norma uniforme

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x(n)|:n\in\mathbb{N}\} \qquad (x\in\ell_\infty)$$

Como caso particular de la anterior proposición, tenemos que ℓ_∞ es un espacio de Banach.

Fijado $p \geqslant 1$, representaremos ℓ_p el espacio de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{k \geqslant 1} |x(k)|^p$ es convergente:

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

Fijado $p \geqslant 1$, representaremos ℓ_p el espacio de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{k \geqslant 1} |x(k)|^p$ es convergente:

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

Y se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \ell_p)$$

Fijado $p \geqslant 1$, representaremos ℓ_p el espacio de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{k \geqslant 1} |x(k)|^p$ es convergente:

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

Y se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \ell_p)$$

Tomando límite en (2), deducimos que si $x \in \ell_p$ e $y \in \ell_q$, entonces $xy \in \ell_1$ y se verifica la siguiente desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(p > 1, x \in \ell_p, y \in \ell_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{5}$$

Fijado $p \geqslant 1$, representaremos ℓ_p el espacio de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{k \geqslant 1} |x(k)|^p$ es convergente:

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

Y se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \ell_p)$$

Tomando límite en (2), deducimos que si $x \in \ell_p$ e $y \in \ell_q$, entonces $xy \in \ell_1$ y se verifica la siguiente desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(p > 1, x \in \ell_p, y \in \ell_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \tag{5}$$

La igualdad se da si, y sólo si, $\|x\|_p = 0$ o $\|y\|_q = 0$ o si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k) + y(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k) + y(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

por lo que deducimos que $x + y \in \ell_p$ y $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

por lo que deducimos que $x+y \in \ell_p$ y $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Es inmediato comprobar ahora que ℓ_p es un espacio vectorial y $\| \ \|_p$ es una norma en ℓ_p.

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k) + y(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

por lo que deducimos que $x + y \in \ell_p$ y $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Es inmediato comprobar ahora que ℓ_p es un espacio vectorial y $\| \ \|_p$ es una norma en ℓ_p.

Además, para $p > 1$, se da la igualdad $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ si, y sólo si, $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

por lo que deducimos que $x+y \in \ell_p$ y $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Es inmediato comprobar ahora que ℓ_p es un espacio vectorial y $\| \ \|_p$ es una norma en ℓ_p.

Además, para $p > 1$, se da la igualdad $\|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ si, y sólo si, $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

Incluyendo el caso evidente en que $p = 1$, $q = \infty$, podemos escribir la desigualdad (5) en la forma

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad \left(p > 1, x \in \ell_p, y \in \ell_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{6}$$

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty \qquad \left(x \in \ell_1, y \in \ell_\infty\right) \tag{7}$$

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.Interpretando $x_n(k)$ como la "coordenada k-ésima" de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*.

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n \in \mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.Interpretando $x_n(k)$ como la "coordenada k-ésima" de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*.Por tanto, **la convergencia de una sucesión en cualquiera de los espacios** ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **implica convergencia por coordenadas**.

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n \in \mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.Interpretando $x_n(k)$ como la "coordenada k-ésima" de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*.Por tanto, **la convergencia de una sucesión en cualquiera de los espacios** ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **implica convergencia por coordenadas**.

Proposición. El espacio ℓ_p donde $1 \leqslant p < \infty$ es un espacio de Banach.

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n \in \mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.Interpretando $x_n(k)$ como la "coordenada k-ésima" de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*.Por tanto, **la convergencia de una sucesión en cualquiera de los espacios** ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **implica convergencia por coordenadas**.

Proposición. El espacio ℓ_p donde $1 \leqslant p < \infty$ es un espacio de Banach.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ representaremos por e_n la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás son cero: $\mathrm{e}_n(n) = 1$ y, para $k \neq n$, $\mathrm{e}_n(k) = 0$. Nos referiremos a los vectores e_n como los **vectores unidad**.

Si $x \in \ell_p$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell_p,\ 1 \leqslant p) \tag{8}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\} \to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.Interpretando $x_n(k)$ como la “coordenada k-ésima” de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*.Por tanto, **la convergencia de una sucesión en cualquiera de los espacios** ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **implica convergencia por coordenadas**.

Proposición. El espacio ℓ_p donde $1 \leqslant p < \infty$ es un espacio de Banach.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ representaremos por e_n la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás son cero: $e_n(n) = 1$ y, para $k \neq n$, $e_n(k) = 0$. Nos referiremos a los vectores e_n como los **vectores unidad**.El subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ que engendran los vectores unidad se representa por c_{00} y es el espacio de las sucesiones que solamente toman un número finito de valores distintos de cero. Dichas sucesiones se llaman **sucesiones casi nulas**. c_{00} es claramente un espacio vectorial de dimensión infinita numerable.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \ \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \, \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p,\ p \geqslant 1,\ \text{o}\ x \in (c_0, \| \, \|_\infty)) \tag{9}$$

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \, \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p,\ p \geqslant 1, \text{ o } x \in (c_0, \| \, \|_\infty)) \tag{9}$$

Como la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n) \mathrm{e}_n$ es una sucesión de elementos de c_{00}, concluimos que $\overline{c_{00}}^{\| \, \|_p} = \ell_p$, es decir c_{00} es denso en ℓ_p.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \ \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p,\ p \geqslant 1,\ \text{o}\ x \in (c_0, \| \ \|_\infty)) \tag{9}$$

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n) \mathrm{e}_n$ es una sucesión de elementos de c_{00}, concluimos que $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_p} = \ell_p$, es decir c_{00} es denso en ℓ_p.También deducimos que la adherencia de c_{00} en ℓ_∞ es c_0, esto es, $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_\infty} = c_0$.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \ \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p,\ p \geqslant 1,\ \text{o}\ x \in (c_0, \| \ \|_\infty)) \tag{9}$$

Como la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$ es una sucesión de elementos de c_{00}, concluimos que $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_p} = \ell_p$, es decir c_{00} es denso en ℓ_p.También deducimos que la adherencia de c_{00} en ℓ_∞ es c_0, esto es, $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_\infty} = c_0$.

La igualdad en (9) es única en el siguiente sentido, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}_n$, donde la convergencia de la serie es en ℓ_p o en c_0, y $c_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $c_n = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**.

Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \; \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera.

Se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p,\ p \geqslant 1,\ \text{o}\ x \in (c_0, \| \; \|_\infty)) \tag{9}$$

Como la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n) \mathrm{e}_n$ es una sucesión de elementos de c_{00}, concluimos que $\overline{c_{00}}^{\| \; \|_p} = \ell_p$, es decir c_{00} es denso en ℓ_p.También deducimos que la adherencia de c_{00} en ℓ_∞ es c_0, esto es, $\overline{c_{00}}^{\| \; \|_\infty} = c_0$.

La igualdad en (9) es única en el siguiente sentido, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}_n$, donde la convergencia de la serie es en ℓ_p o en c_0, y $c_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $c_n = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x(k)\,\mathrm{e}_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty$, es decir, si $x \in \ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x(k)\,\mathrm{e}_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty$, es decir, si $x \in \ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

Para $1 \leqslant p < q$ y para todo $x \in \ell_p$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$, y por tanto $\ell_p \subset \ell_q$.

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x(k)\,\mathrm{e}_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty$, es decir, si $x \in \ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

Para $1 \leqslant p < q$ y para todo $x \in \ell_p$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$, y por tanto $\ell_p \subset \ell_q$.De hecho, se verifica que

$$\ell_p \underset{\neq}{\subsetneq} \bigcap_{q>p} \ell_q; \qquad \bigcup_{1\leqslant q<p} \ell_q \underset{\neq}{\subsetneq} \ell_p; \qquad \bigcup_{1\leqslant p} \ell_p \underset{\neq}{\subsetneq} c_0$$

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x(k)\mathrm{e}_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty$, es decir, si $x \in \ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

Para $1 \leqslant p < q$ y para todo $x \in \ell_p$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$, y por tanto $\ell_p \subset \ell_q$.De hecho, se verifica que

$$\ell_p \subsetneqq \bigcap_{q>p} \ell_q; \qquad \bigcup_{1\leqslant q<p} \ell_q \subsetneqq \ell_p; \qquad \bigcup_{1\leqslant p} \ell_p \subsetneqq c_0$$

Observa también que si $1 \leqslant p < q < \infty$, entonces podemos considerar ℓ_p como subespacio normado de ℓ_q, y como $c_{00} \subset \ell_p$, se tiene que $\overline{\ell_p}^{\|\ \|_q} = \ell_q$, es decir, ℓ_p es un subespacio denso en ℓ_q.

La convergencia de la serie en (9) es incondicional.

Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} \|x(k)\mathrm{e}_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| < \infty$, es decir, si $x \in \ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

Para $1 \leqslant p < q$ y para todo $x \in \ell_p$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$, y por tanto $\ell_p \subset \ell_q$.De hecho, se verifica que

$$\ell_p \subsetneqq \bigcap_{q>p} \ell_q; \qquad \bigcup_{1 \leqslant q < p} \ell_q \subsetneqq \ell_p; \qquad \bigcup_{1 \leqslant p} \ell_p \subsetneqq c_0$$

Observa también que si $1 \leqslant p < q < \infty$, entonces podemos considerar ℓ_p como subespacio normado de ℓ_q, y como $c_{00} \subset \ell_p$, se tiene que $\overline{\ell_p}^{\| \ \|_q} = \ell_q$, es decir, ℓ_p es un subespacio denso en ℓ_q.Por otra parte, es claro que $\overline{\ell_p}^{\| \ \|_\infty} = c_0$.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Cuando esto ocurre, el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente denso en X, por lo que X es separable.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Cuando esto ocurre, el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente denso en X, por lo que X es separable.

Hemos visto que la sucesión de los vectores unidad $\{\mathrm{e}_n\}$ es una base de Schauder en ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$ y en c_0.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Cuando esto ocurre, el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente denso en X, por lo que X es separable.

Hemos visto que la sucesión de los vectores unidad $\{\mathrm{e}_n\}$ es una base de Schauder en ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$ y en c_0.No puede ser una base de Schauder en ℓ_∞ porque dicho espacio no es separable.

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

Proposición. Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \| \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x \in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Cuando esto ocurre, el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente denso en X, por lo que X es separable.

Hemos visto que la sucesión de los vectores unidad $\{\mathrm{e}_n\}$ es una base de Schauder en ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$ y en c_0.No puede ser una base de Schauder en ℓ_∞ porque dicho espacio no es separable.

Proposición. $\ell_\infty(\Omega)$ es separable si, y sólo si, Ω es un conjunto finito.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$$

es compacto.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$$

es compacto.Tales funciones se dice que se **anulan en infinito**.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon>0$ el conjunto

$$\{t\in\Omega:|f(t)|\geqslant\varepsilon\}$$

es compacto.Tales funciones se dice que se **anulan en infinito**.

Representaremos por $C_{00}(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que el conjunto

$$\operatorname{sop}(f)=\overline{\{t\in\Omega:f(t)\neq 0\}}$$

llamado **soporte** de la función f, es compacto.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon>0$ el conjunto

$$\{t\in\Omega : |f(t)|\geqslant\varepsilon\}$$

es compacto.Tales funciones se dice que se **anulan en infinito**.

Representaremos por $C_{00}(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que el conjunto

$$\mathrm{sop}(f)=\overline{\{t\in\Omega : f(t)\neq 0\}}$$

llamado **soporte** de la función f, es compacto.Dichas funciones se llaman, claro está, funciones **continuas de soporte compacto**.

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon>0$ el conjunto

$$\{t\in\Omega : |f(t)|\geqslant\varepsilon\}$$

es compacto.Tales funciones se dice que se **anulan en infinito**.

Representaremos por $C_{00}(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f:\Omega\to\mathbb{K}$ tales que el conjunto

$$\mathrm{sop}(f)=\overline{\{t\in\Omega : f(t)\neq 0\}}$$

llamado **soporte** de la función f, es compacto.Dichas funciones se llaman, claro está, funciones **continuas de soporte compacto**.

La razón de suponer que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, es porque dicha hipótesis garantiza la abundancia de funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$. Ello es debido al siguiente resultado, que no vamos a demostrar.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \;\; \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \;\; \forall t \in K \tag{10}$$

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\mathrm{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \;\; \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \;\; \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Proposición.

- El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\mathrm{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Proposición.

- El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.
- Se verifica que $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ y ambos son subespacios de $C_b(\Omega)$.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Proposición.

- El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.
- Se verifica que $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ y ambos son subespacios de $C_b(\Omega)$.
- La adherencia de $C_{00}(\Omega)$ es $C_0(\Omega)$. Por tanto $C_0(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\mathrm{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Proposición.

- El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.
- Se verifica que $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ y ambos son subespacios de $C_b(\Omega)$.
- La adherencia de $C_{00}(\Omega)$ es $C_0(\Omega)$. Por tanto $C_0(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme.

Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos. Sea Ω un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, y sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que

$$\mathrm{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad \text{y} \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{10}$$

Algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir son los siguientes.

Proposición.

- El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.
- Se verifica que $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ y ambos son subespacios de $C_b(\Omega)$.
- La adherencia de $C_{00}(\Omega)$ es $C_0(\Omega)$. Por tanto $C_0(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme.

Naturalmente, si Ω es un espacio de Hausdorff compacto se tiene que

$$C_{00}(\Omega) = C_0(\Omega) = C_b(\Omega) = C(\Omega)$$

es el espacio de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$.

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$.

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$.Representaremos por $L(\Omega)$ el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}$.

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$.Representaremos por $L(\Omega)$ el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}$.En consecuencia, los elementos de $L(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones bajo la relación de equivalencia de “ser iguales casi por doquier”, no obstante, como todo el mundo hace, trataremos los elementos de este espacio como funciones de $\mathcal{L}(\Omega)$ sin olvidar, claro está, que debemos tratar como la misma función a funciones que son iguales casi por doquier.

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$.Representaremos por $L(\Omega)$ el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}$.En consecuencia, los elementos de $L(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones bajo la relación de equivalencia de "ser iguales casi por doquier", no obstante, como todo el mundo hace, trataremos los elementos de este espacio como funciones de $\mathcal{L}(\Omega)$ sin olvidar, claro está, que debemos tratar como la misma función a funciones que son iguales casi por doquier.

Para cada $p \geqslant 1$ definimos

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$.Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$.Representaremos por $L(\Omega)$ el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}$.En consecuencia, los elementos de $L(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones bajo la relación de equivalencia de "ser iguales casi por doquier", no obstante, como todo el mundo hace, trataremos los elementos de este espacio como funciones de $\mathcal{L}(\Omega)$ sin olvidar, claro está, que debemos tratar como la misma función a funciones que son iguales casi por doquier.

Para cada $p \geqslant 1$ definimos

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

Puesto que

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x|)^p \leqslant 2^p \max\left\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\right\} \leqslant 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

tenemos que $L_p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para $f \in L_p(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para $f \in L_p(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Desigualdad de Hölder. Sean $p > 1$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$, y se verifica la desigualdad integral de Hölder:

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

Para $f \in L_p(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Desigualdad de Hölder. Sean $p > 1$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$, y se verifica la desigualdad integral de Hölder:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

Es decir $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Para $f \in L_p(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Desigualdad de Hölder. Sean $p > 1$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$, y se verifica la desigualdad integral de Hölder:

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

Es decir $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si y sólo si, $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ casi para todo $x \in \Omega$.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_{\Omega} |f(t) + g(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Es decir $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t) + g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Es decir $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t) + g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (12)$$

Es decir $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\| \ \|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Es decir $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\| \ \|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$.El siguiente resultado fundamental se supone conocido.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t) + g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (12)$$

Es decir $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\| \, \|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$.El siguiente resultado fundamental se supone conocido.

Teorema de Riesz-Fisher. El espacio normado $(L_p(\Omega), \| \, \|_p)$ es un espacio de Banach.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Es decir $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\| \;\|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$.El siguiente resultado fundamental se supone conocido.

Teorema de Riesz-Fisher. El espacio normado $(L_p(\Omega), \| \;\|_p)$ es un espacio de Banach.

En la demostración de este teorema se prueba también un resultado que se utiliza con frecuencia.

Desigualdad de Minkowski. Para $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$ se verifica que

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Es decir $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\| \ \|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$.El siguiente resultado fundamental se supone conocido.

Teorema de Riesz-Fisher. El espacio normado $(L_p(\Omega), \| \ \|_p)$ es un espacio de Banach.

En la demostración de este teorema se prueba también un resultado que se utiliza con frecuencia.

Proposición. Si $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\Omega)$ entonces hay una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ que converge puntualmente a f casi por doquier en Ω.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para casi todo $x \in \Omega$.

Consideramos a continuación el caso en que $p=\infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f\in\mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M\geqslant 0$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ para casi todo $x\in\Omega$.En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup} f = \inf\{M\geqslant 0 : |f(x)|\leqslant M \quad \text{c.p.t. } x\in\Omega\} \tag{13}$$

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para casi todo $x \in \Omega$.En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup} f = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \;\; \text{c.p.t. } x \in \Omega\} \tag{13}$$

Observa que si $f \in \ell_\infty(\Omega)$, entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \Omega$ por lo que $\text{ess-sup}(f) \leqslant \|f\|_\infty$.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para casi todo $x \in \Omega$.En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup} f = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \ \ \text{c.p.t. } x \in \Omega\} \tag{13}$$

Observa que si $f \in \ell_\infty(\Omega)$, entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \Omega$ por lo que $\text{ess-sup}(f) \leqslant \|f\|_\infty$.El siguiente resultado prueba que el ínfimo que aparece en (13) es, de hecho, un mínimo.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para casi todo $x \in \Omega$.En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup} f = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \ \ \text{c.p.t. } x \in \Omega\} \tag{13}$$

Observa que si $f \in \ell_\infty(\Omega)$, entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \Omega$ por lo que $\text{ess-sup}(f) \leqslant \|f\|_\infty$.El siguiente resultado prueba que el ínfimo que aparece en (13) es, de hecho, un mínimo.

Proposición. Sea f una función esencialmente acotada en Ω. Entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \text{ess}-\text{sup}(f)$ para casi todo $x \in \Omega$.

Consideramos a continuación el caso en que $p = \infty$.Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación.Se dice que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para casi todo $x \in \Omega$.En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup} f = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad \text{c.p.t. } x \in \Omega\} \tag{13}$$

Observa que si $f \in \ell_\infty(\Omega)$, entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \Omega$ por lo que $\text{ess-sup}(f) \leqslant \|f\|_\infty$.El siguiente resultado prueba que el ínfimo que aparece en (13) es, de hecho, un mínimo.

Proposición. Sea f una función esencialmente acotada en Ω. Entonces se verifica que $|f(x)| \leqslant \text{ess}-\text{sup}(f)$ para casi todo $x \in \Omega$.

Resulta evidente que si f es una función esencialmente acotada en Ω, cualquier otra función que sea igual a f casi por doquier en Ω también está esencialmente acotada en Ω, y sus supremos esenciales coinciden.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

Proposición. El espacio normado $(L_\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

Proposición. El espacio normado $(L_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Recuerda que una **función escalonada** es una combinación lineal de funciones características de intervalos acotados.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess} - \sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

Proposición. El espacio normado $(L_\infty(\Omega), \| \, \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Recuerda que una **función escalonada** es una combinación lineal de funciones características de intervalos acotados.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio de las funciones escalonadas cuyo soporte está contenido en Ω es denso en $L_p(\Omega)$.

Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty = \mathrm{ess}-\sup(f) \qquad (f \in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

Proposición. El espacio normado $(L_\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Recuerda que una **función escalonada** es una combinación lineal de funciones características de intervalos acotados.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio de las funciones escalonadas cuyo soporte está contenido en Ω es denso en $L_p(\Omega)$.

Considerando funciones escalonadas de intervalos con extremos racionales, obtenemos, como consecuencia fácil de este teorema, que para $1 \leqslant p < \infty$ **el espacio de Banach $L_p(\Omega)$ es separable**.

Notaremos por $C^{\infty}_{00}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.
- Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneq L_p[0,1]$.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.
- Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.
- Para $p > 1$ se verifica que $\displaystyle L_p[0,1] \subsetneqq \bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.
- Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.
- Para $p > 1$ se verifica que $\displaystyle L_p[0,1] \subsetneqq \bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.
- Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.
- Para $p > 1$ se verifica que $L_p[0,1] \subsetneqq \displaystyle\bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$.

Las relaciones que acabamos de obtener para los espacios de Lebesgue $L_p[0,1]$, permanece válidas con pequeños ajustes para espacios $L_p[a,b]$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e incluso para espacios de Lebesgue $L_p(\Omega)$ donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$ de medida finita. Pero no son válidas cuando Ω es de medida infinita.

Notaremos por $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

Teorema. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición.

- Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.
- Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.
- Para $p > 1$ se verifica que $\displaystyle L_p[0,1] \subsetneqq \bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$.

Las relaciones que acabamos de obtener para los espacios de Lebesgue $L_p[0,1]$, permanece válidas con pequeños ajustes para espacios $L_p[a,b]$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e incluso para espacios de Lebesgue $L_p(\Omega)$ donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$ de medida finita. Pero no son válidas cuando Ω es de medida infinita.

Proposición. $L_\infty(\Omega)$ no es separable.

Teorema del punto fijo de Banach.

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T: X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0 \leqslant \rho < 1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leqslant \rho \, \mathrm{d}(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0 \leqslant \rho < 1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leqslant \rho\,\mathrm{d}(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

Entonces se verifica que:

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T:X\to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0\leqslant\rho<1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx,Ty)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(x,y)\qquad(x,y\in X)$$

Entonces se verifica que:

1. La ecuación $Tx=x$ tiene una única solución $u\in X$ (dicha solución se llama un **punto fijo** de T).

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0 \leqslant \rho < 1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leqslant \rho\,\mathrm{d}(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

Entonces se verifica que:

1. La ecuación $Tx = x$ tiene una única solución $u \in X$ (dicha solución se llama un **punto fijo** de T).
2. Dado $u_0 \in X$, la sucesión $\{u_n\}$ definida por $u_{n+1} = T(u_n)$ para todo $n = 0,1,2\dots$ converge al único punto fijo de T.

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T: X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0 \leqslant \rho < 1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leqslant \rho \mathrm{d}(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

Entonces se verifica que:

1. La ecuación $Tx = x$ tiene una única solución $u \in X$ (dicha solución se llama un **punto fijo** de T).
2. Dado $u_0 \in X$, la sucesión $\{u_n\}$ definida por $u_{n+1} = T(u_n)$ para todo $n = 0, 1, 2 \ldots$ converge al único punto fijo de T.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes cotas de error:

$$\mathrm{d}(u_n, u) \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} \mathrm{d}(u_1, u_0)$$

$$\mathrm{d}(u_{n+1}, u) \leqslant \frac{\rho}{1-\rho} \mathrm{d}(u_{n+1}, u_n)$$

$$\mathrm{d}(u_{n+1}, u) \leqslant \rho \mathrm{d}(u_n, u)$$

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0 \leqslant \rho < 1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx, Ty) \leqslant \rho\,\mathrm{d}(x,y) \qquad (x,y \in X)$$

Entonces se verifica que:

1. La ecuación $Tx = x$ tiene una única solución $u \in X$ (dicha solución se llama un **punto fijo** de T).
2. Dado $u_0 \in X$, la sucesión $\{u_n\}$ definida por $u_{n+1} = T(u_n)$ para todo $n = 0, 1, 2\dots$ converge al único punto fijo de T.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes cotas de error:

$$\mathrm{d}(u_n, u) \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho}\mathrm{d}(u_1, u_0)$$
$$\mathrm{d}(u_{n+1}, u) \leqslant \frac{\rho}{1-\rho}\mathrm{d}(u_{n+1}, u_n)$$
$$\mathrm{d}(u_{n+1}, u) \leqslant \rho\,\mathrm{d}(u_n, u)$$

Teorema del punto fijo de Banach. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $T:X\to X$ una aplicación contractiva, es decir, existe un número ρ con $0\leqslant\rho<1$ tal que

$$\mathrm{d}(Tx,Ty)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(x,y)\qquad(x,y\in X)$$

Entonces se verifica que:

1. La ecuación $Tx=x$ tiene una única solución $u\in X$ (dicha solución se llama un **punto fijo** de T).
2. Dado $u_0\in X$, la sucesión $\{u_n\}$ definida por $u_{n+1}=T(u_n)$ para todo $n=0,1,2\dots$ converge al único punto fijo de T.
3. Para todo $n\in\mathbb{N}$ se tienen las siguientes cotas de error:

$$\mathrm{d}(u_n,u)\leqslant\frac{\rho^n}{1-\rho}\mathrm{d}(u_1,u_0)$$
$$\mathrm{d}(u_{n+1},u)\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\mathrm{d}(u_{n+1},u_n)$$
$$\mathrm{d}(u_{n+1},u)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(u_n,u)$$

La siguiente es una bonita aplicación del teorema.

La siguiente es una bonita aplicación del teorema.Una ecuación del tipo

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

La siguiente es una bonita aplicación del teorema.Una ecuación del tipo

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

donde se supone que $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ son funciones continuas conocidas, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, y en la que la incógnita es la función ϕ, se llama una *ecuación integral de Volterra de segunda clase*.

La siguiente es una bonita aplicación del teorema.Una ecuación del tipo

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

donde se supone que $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ son funciones continuas conocidas, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, y en la que la incógnita es la función ϕ, se llama una *ecuación integral de Volterra de segunda clase*.

Proposición. Dadas funciones $K \in C([a,b] \times [a,b])$ y $f \in C[a,b]$, se verifica que para todo $\lambda \neq 0$, la ecuación integral de Volterra

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

tiene una solución única $\phi \in C[a,b]$.